Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Poincaréschen Halbebene.

Von PAUL SZÁSZ in Budapest.

H. POINCARÉ [1]) hat als eine Verwirklichung der hyperbolischen ebenen Geometrie folgendes Modell, wir möchten sagen *Bildgeometrie* oder *Pseudogeometrie* angegeben, wenn auch in etwas anderer Form.

Es sei in der euklidischen Ebene eine Gerade γ als *Fundamentalgerade* vorgelegt. Die inneren Punkte einer der durch γ bestimmten zwei Halbebenen sollen *Pseudopunkte*, die im Innern dieser Halbebene liegenden und zu γ rechtwinkligen Halbkreise bzw. Halbgeraden (die wir *Orthogonalhalbkreise* resp. *Orthogonalhalbgeraden* nennen wollen), *Pseudogeraden* heißen. Als *Pseudoabstand* zweier nicht in einer Orthogonalhalbgeraden liegenden Pseudopunkte P_1, P_2 erklären wir die Größe

$$\overline{P_1 P_2} = \log (\Xi H P_2 P_1) \tag{1}$$

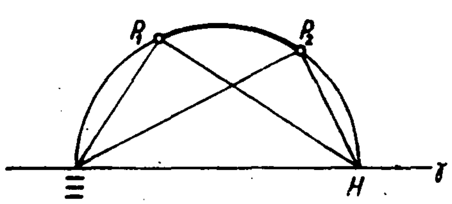

Fig. 1

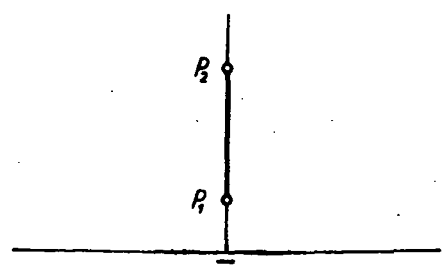

Fig. 2

wobei Ξ, H die Endpunkte des durch P_1 und P_2 gelegten Orthogonalhalbkreises sind, so bezeichnet, daß P_2 auf diesem Halbkreisbogen $\widehat{\Xi H}$ zwischen P_1 und H liegt (Fig. 1), und $(\Xi H P_2 P_1)$ das Doppelverhältnis

$$(\Xi H P_2 P_1) = \frac{\Xi P_2}{P_2 H} : \frac{\Xi P_1}{P_1 H}$$

[1]) H. POINCARÉ, Théorie des groupes fuchsiens, *Acta Math.*, 1 (1882), 1—62, besonders § 2, S. 6—8.

bedeutet. Sind P_1 und P_2 Punkte einer Orthogonalhalbgeraden mit dem Anfangspunkt Ξ, und ist die Bezeichnung so gewählt, daß P_1 zwischen Ξ und P_2 liegt (Fig. 2), so sei der Pseudoabstand dieser Pseudopunkte der Formel (1) entsprechend

$$\overline{P_1P_2} = \log \frac{\Xi P_2}{\Xi P_1}. \tag{2}$$

Dem gegenüber soll der *Pseudowinkel* zweier Pseudogeraden l, m einfach durch den Winkel der sie erzeugenden Orthogonalhalbkreise (deren einer in eine Orthogonalhalbgerade entarten kann) gemessen werden (Fig. 3). In der durch diese Festsetzungen erklärten Bildgeometrie sind in der Tat alle Postulate der hyperbolischen ebenen Geometrie erfüllt, wie man sich davon leicht überzeugen kann.

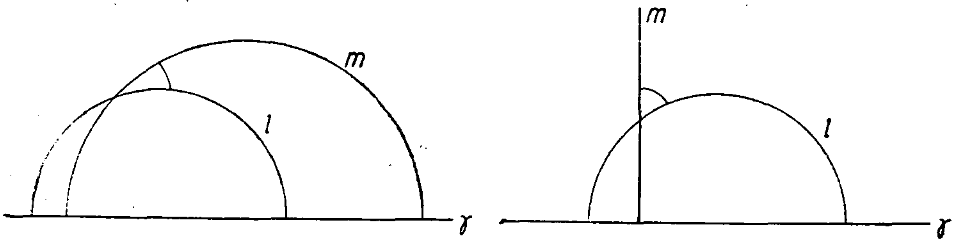

Fig. 3

Diese sogenannte *Poincarésche Halbebene* ist aber nicht nur ein Modell der hyperbolischen ebenen Geometrie, sie ist mit ihr auch äquivalent: man kann die hyperbolische Ebene auf die Poincarésche Halbebene eineindeutig abbilden. Das mag in sehr einfacher Weise gezeigt werden, und zwar ohne Verwendung der hyperbolischen Trigonometrie[2]). Eine Herleitung der Trigonometrie dieses Modells gilt deshalb für einen Beweis der Formeln der hyperbolischen Trigonometrie. In vorliegender Note geben wir eben einen Beweis dieser Art.

Die Herleitung der Trigonometrie des *Poincaréschen Kreismodells*,[3]) die schon HOWARD EVES und V. E. HOGGATT[4]) und in einfacherer Weise wir[5]) dargetan haben, kann als ein Beweis ähnlicher Art aufgefaßt werden, da dieses Modell eine eineindeutige Abbildung der Poincaréschen Halbebene ist. Noch einfacher gestaltet sich aber unser gegenwertiger Beweis, dem wir uns jetzt zuwenden.

---

[2]) Siehe z. B. PAUL SZÁSZ, Über die Hilbertsche Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

[3]) H. POINCARÉ, a. a. O. [1]). § 12, S. 58—61.

[4]) HOWARD EVES and V. E. HOGGATT, Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model, *American Math. Monthly*, **58** (1951), 469—474.

[5]) PAUL SZÁSZ, Über die Trigonometrie des Poincaréschen Kreismodells der hyperbolischen ebenen Geometrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

Es sei ABC ein bei C rechtwinkliges Pseudodreieck mit den Bestimmungsstücken $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\sphericalangle BAC = \lambda$, $\sphericalangle CBA = \mu$. Es mag durch eine Pseudodrehung um B in eine solche Lage gebracht werden, daß A zwischen B und dem Anfangspunkt Ω der durch B gelegten Orthogonal-

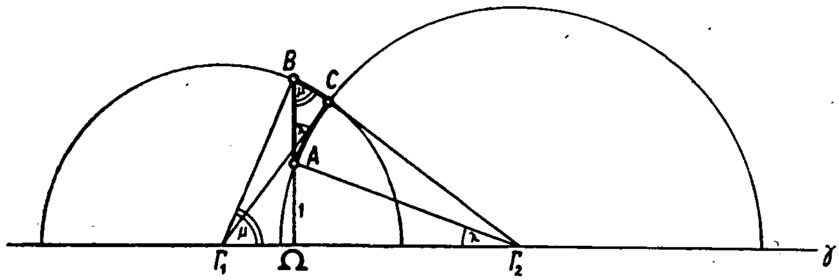

Fig. 4

halbgeraden liegt (Fig. 4). Wird $\Omega A = 1$ gesetzt, so ist im Sinne von (2)

$$c = \overline{AB} = \log \Omega B,$$

d. h.

(3) $$\Omega B = e^c.$$

Bezeichnet Γ_1 bzw. Γ_2 den Mittelpunkt des durch die Punkte B, C resp. A, C gelegten Orthogonalhalbkreises, so ist offenbar $\sphericalangle \Omega \Gamma_1 B = \mu$, $\sphericalangle \Omega \Gamma_2 A = \lambda$, also mit Rücksicht auf (3)

(4) $$\Omega \Gamma_1 = e^c \operatorname{ctg} \mu, \quad \Omega \Gamma_2 = \operatorname{ctg} \lambda,$$

und

(5) $$\Gamma_1 C = \Gamma_1 B = \frac{e^c}{\sin \mu}, \quad \Gamma_2 C = \Gamma_2 A = \frac{1}{\sin \lambda}.$$

Da aber nach Voraussetzung die beiden Orthogonalhalbkreise sich in C rechtwinklig schneiden, also $\sphericalangle \Gamma_1 C \Gamma_2$ ein Rechter ist, so gilt nach dem Pythagoreischen Lehrsatz

$$\Gamma_1 \Gamma_2^2 = \Gamma_1 C^2 + \Gamma_2 C^2$$

d. h. auf Grund von (4) und (5)

$$(e^c \operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \lambda)^2 = \frac{e^{2c}}{\sin^2 \mu} + \frac{1}{\sin^2 \lambda},$$

woher sich

$$2e^c \operatorname{ctg} \lambda \operatorname{ctg} \mu = e^{2c} + 1$$

oder

(I) $$\operatorname{ctg} \lambda \operatorname{ctg} \mu = \operatorname{ch} c$$

ergibt.

Nun bringen wir das rechtwinklige Pseudodreieck ABC nochmals durch eine Pseudodrehung um B in eine solche Lage, daß B zwischen C und dem

Anfangspunkt Ω der vorigen Orthogonalhalbgeraden liegt (Fig. 5). Setzen wir jetzt $\Omega B = 1$, so ist nach (2)

$$a = \overline{BC} = \log \Omega C$$

d. h.

(6) $$\Omega A = \Omega C = e^a.$$

Bezeichnet Γ_3 den Mittelpunkt des durch die Punkte A, B gelegten Orthogonalhalbkreises, so ist offenbar $\sphericalangle \Omega \Gamma_3 B = \mu$ und deshalb

(7) $$\Gamma_3 A = \Gamma_3 B = \frac{1}{\sin \mu}, \quad \Omega \Gamma_3 = \operatorname{ctg} \mu.$$

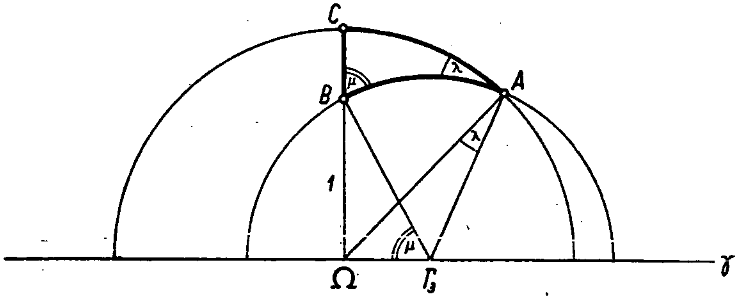

Fig. 5

Weil aber $\sphericalangle \Omega A \Gamma_3 = \lambda$ ausfällt, so ergibt der Cosinussatz für das Dreieck $A \Omega \Gamma_3$

$$\Omega \Gamma_3^2 = \Omega A^2 + \Gamma_3 A^2 - 2 \Omega A . \ \Gamma_3 A \cos \lambda$$

d. h. mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$\operatorname{ctg}^2 \mu = e^{2a} + \frac{1}{\sin^2 \mu} - \frac{2e^a}{\sin \mu} \cos \lambda,$$

woraus folgt

$$2e^a \frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = e^{2a} + 1$$

oder

(II) $$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \operatorname{ch} a.$$

Die Formeln (I) und (II) haben schon die ganze hyperbolische Trigonometrie zur Folge. Der angekündigte Beweis ist daher fertig.

(Eingegangen am 12. Juni 1953.)